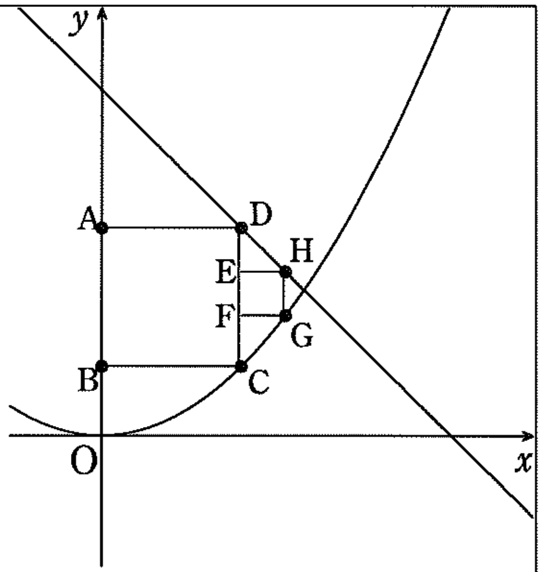
第2回入試説明会　数学解答

図の四角形ABCDは1辺の長さが1の正方形で，
頂点Cは放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の $x>0$ の部分にあり，
辺ABは y 軸上にある。直線 ℓ は傾きが -1 で，
頂点Dを通る直線である。
このとき，次の各問いに答えよ。



(1)　頂点Dの座標をそれぞれ求めよ。
(2)　直線 ℓ の方程式を求めよ。
(3)　線分CDと放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 ℓ で囲まれた部分に正方形EFGHをかく。ただし，辺EFは線分CD上にあり，頂点Gは放物線上，頂点Hは直線 ℓ 上にある。このとき，正方形EFGHの1辺の長さを求めよ。

(1) 四角形ABCDは1辺の長さが1の正方形より，点C，点Dは，$x=1$ である。

ここで，点Cは，$y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるため，点Cの y 座標は

$$y=\frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$y=\frac{1}{2}$$　とわかる。

また，CDの長さは1であるから，点Dの y 座標は，$\frac{3}{2}$ となる。

よって点D $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

(2) 直線 ℓ を $y=ax+b$ (a:傾き，b:切片) とすると，直線 ℓ の傾きが -1 より，$a=-1$ となる。

また，直線 ℓ は点D $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ を通るので，$y=-x+b$ に代入して，

$$\frac{3}{2}=-1+b$$

$$b=\frac{5}{2}$$

よって 直線 ℓ は，$y=-x+\frac{5}{2}$

(3) 正方形EFGHの1辺の長さを a とおく。すると, 点G, 点Hの x 座標が $1+a$ とわかる。

ここで点Hは直線 ℓ 上にあるため, 点H の y 座標は,

$$y=-(1+a)+\frac{5}{2}$$

$$y=\frac{3}{2}-a$$ とできる。

また,点G は $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるため, 点Gの y 座標は, $y=\frac{1}{2}(1+a)^2$ とわかる。

GHの長さは a であるから, 点Hの y 座標は, $y=\frac{1}{2}(1+a)^2+a$ となる。

点Hの y 座標についての方程式を解く。

$$\frac{3}{2}-a=\frac{1}{2}(1+a)^2+a$$

$$\frac{1}{2}a^2+3a-1=0$$

$$a^2+6a-2=0$$

解の公式を用いて $a=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4(-2)}}{2}$

$$a=-3\pm\sqrt{11}$$

a は正方形EFGHの辺の長さであるから, $a>0$

よって, $a=-3+\sqrt{11}$